ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ QUỲNH

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC TRONG ĐẠI SỐ TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ QUỲNH

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC TRONG ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2021

Mục lục

MỞ ĐẦU **1**

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1. Đa thức và nghiệm của đa thức 3

1.2. Chuỗi lũy thừa hình thức 6

Chương 2. Đa thức quân cờ và ứng dụng **10**

2.1. Đa thức quân cờ 10

2.2. Ứng dụng trong tổ hợp 18

2.2.1. Hoán vị và xáo trộn 18

2.2.2. Hoán vị với vị trí cấm 19

2.2.3. Bài toán đếm số hoán vị với khối ô vuông Latinh 29

Chương 3. Một số ứng dụng khác của đa thức trong tổ hợp . 32

3.1. Lũy thừa đa thức, chuỗi lũy thừa hình thức và ứng dụng . . . 32

3.2. Nghiệm của đa thức và bài toán phủ bảng các ô vuông 42

KẾT LUẬN **47**

Tài liệu tham khảo **47**

MỞ ĐẦU

Đa thức có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học cũng như trong giải toán sơ cấp. Luận văn tìm hiểu một số ứng dụng của đa thức trong giải toán tổ hợp.

Mục đích chính thứ nhất của luận văn là nghiên cứu về đa thức quân cờ (rook polynomial) và ứng dụng trong giải toán tổ hợp. Lý thuyết các quân cờ (Rook Theory) mà đối tượng của nó là đa thức quân cờ được nghiên cứu đầu tiên bởi Kaplansky và Riordan vào năm 1946 ([10]), và sau đó là các mở rộng của Goldman ([6], [7]) với sự ứng dụng của nhiều phương pháp tổ hợp hiện đại từ những năm 1970. Trong những năm gần đây Haglund đạt được nhiều thành công trong việc gắn kết đa thức quân cờ với nhiều lĩnh vực khác như bài toán đếm ma trận trên trường hữu hạn, lý thuyết biểu diễn nhóm. Lý thuyết các quân cờ cũng có quan hệ gần gũi với nhiều ứng dụng trong lý thuyết đồ thị, người ta cũng đã vận dụng đa thức quân cờ cùng với cơ học lượng tử và đại số Weyl. Còn trong tổ hợp đếm nói riêng, đa thức quân cờ liên quan đến hàng loạt các bài toán đếm về hoán vị, hoán vị với vị trí cấm, hình vuông Latin, ... Luận văn trình bày một số tính chất của đa thức quân cờ và vận dụng vào tìm hiểu một số bài toán đếm cơ bản, bài toán đếm số hoán vị, hoán vị cấm (Derangement problem, Ménage problem), bài toán đếm liên quan đến hình vuông Latin. Luận văn trình bày định nghĩa, một số tính chất cơ bản và một số ứng dụng của đa thức quân cờ theo [13, Chapter 2], [3] và [2]. Một số ứng dụng và ví dụ tham khảo theo [11], [12], [5] và [2].

Mục đích chính thứ hai tìm hiểu một số ứng dụng khác của đa thức trong giải toán tổ hợp. Trong rất nhiều ứng dụng luận văn chọn tìm hiểu ứng dụng trong bài toán đếm khi khai triển lũy thừa đa thức,

ứng dụng nghiệm của đa thức liên quan đến bài toán phủ bảng các ô vuông. Đa thức là trường hợp đặc biệt của chuỗi lũy thừa hình thức. Luận văn trình bày khai triển chuỗi lũy thừa hình thức ứng dụng trong bài toán đếm (Bài toán chia kẹo Euler). Bên cạnh việc tổng hợp một số kiến thức liên quan, luận văn trình bày ứng dụng qua hệ thống các vị dụ được lấy từ các kỳ thi học sinh giỏi của các nước, IMO, Bay Area Math Circle, Olympic sinh viên, ...

Luận văn được chia làm ba chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ sở về đa thức, chuỗi lũy thừa hình thức. Chương 2 trình bày về đa thức quân cờ, các tính chất phổ biến và ứng dụng trong một số bài toán tổ hợp. Chương 3 trình bày một số ứng dụng khác của đa thức trong một số bài toán đếm, bài toán phủ bảng các ô vuông.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học toán khoá 12 đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2021

Đặng Thị Quỳnh

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt chương này, luôn giả thiết R một vành giao hoán có đơn vị.

1.1. Đa thức và nghiệm của đa thức

Định nghĩa 1.1.1. Một *đa thức một biến với hệ số trên* R có thể được viết dưới dạng $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, trong đó $a_0, \ldots, a_n \in R$ và x là một kí hiệu gọi là *biến* (hay *biến không xác định*). Ta cũng viết đa thức này dưới dạng $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ hoặc $f(x) = \sum a_i x^i$, trong đó $a_i = 0$ với mọi $i > n$. Hai đa thức $\sum a_i x^i$ và $\sum b_i x^i$ là *bằng nhau* nếu $a_i = b_i$ với mọi i.

Kí hiệu là $R[x]$ là tập các đa thức một biến x với hệ số trên R. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Ta gọi a_0 là *hệ số tự do* của $f(x)$. Nếu $a_n \neq 0$ thì n được gọi là *bậc* của $f(x)$ và được kí hiệu là $\deg f(x)$. Trong trường hợp này, a_n được gọi là *hệ số cao nhất* của $f(x)$. Nếu $a_n = 1$ thì $f(x)$ được gọi là *đa thức dạng chuẩn* (monic polynomial). Ta không định nghĩa bậc cho đa thức 0. Nếu $f(x) = a \in R$ thì $f(x)$ được gọi là *đa thức hằng*. Các đa thức bậc 1 được gọi là *đa thức tuyến tính*.

Định nghĩa 1.1.2. Với hai đa thức $f(x) = \sum a_i x^i$ và $g(x) = \sum b_i x^i$

trong $R[x]$, định nghĩa

$$f(x) + g(x) = \sum (a_i + b_i)x^i.$$
$$f(x)g(x) = \sum c_k x^k, \text{ trong đó } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ với mọi } k.$$

Khi đó $R[x]$ là vành giao hoán với phép cộng và nhân đa thức. Vành $R[x]$ được gọi là *vành đa thức một biến x với hệ số trong R*. Phần tử không của vành là đa thức 0, phần tử đơn vị là đa thức 1.

Để định nghĩa đa thức nhiều biến trước hết ta định nghĩa đơn thức. Mỗi bộ n số nguyên không âm $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ cho ta một *đơn thức* $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ của n biến $x_1, \ldots, x_n$ với *bậc* là $i_1 + \cdots + i_n$. Chúng ta thường viết đơn thức này dưới dạng $\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$.

Với $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, hai đơn thức $\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ và $\mathbf{x}^{\mathbf{j}}$ là *bằng nhau* nếu $\mathbf{i} = \mathbf{j}$, tức là $i_k = j_k$ với mọi k.

Một *từ* là một biểu thức có dạng $a\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ với $a \in R$ (được gọi là *hệ số* của từ) và $\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ là một đơn thức được gọi là *đơn thức của từ*. Hai từ được gọi là *đồng dạng* nếu hai đơn thức của chúng bằng nhau. Hai từ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng đồng dạng và có cùng hệ số.

Một *đa thức* là một tổng của hữu hạn từ. Nếu $u = a\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ và $v = b\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ là hai từ đồng dạng thì ta có thể ước lược tổng của chúng:

$$u + v = (a + b)\mathbf{x}^{\mathbf{i}}.$$

Vì vậy, bằng cách ước lược các từ đồng dạng, mỗi đa thức $f(x_1, \ldots, x_n)$ có một *biểu diễn chính tắc*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$$

thành tổng của các từ đôi một không đồng dạng, trong đó chỉ có hữu hạn từ khác 0 (tức là hệ số của từ khác 0), và biểu diễn này là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các hạng tử. Mỗi từ khác 0 xuất hiện trong biểu diễn chính tắc của đa thức được gọi là *một từ* của đa thức đó.

Hai đa thức $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ và $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} b_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ là *bằng nhau* nếu $a_{\mathbf{i}} = b_{\mathbf{i}}$ với mọi $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n$. *Bậc* của một từ khác 0 là bậc của đơn thức của từ đó. *Bậc* (hay *bậc tổng thể*) của đa thức $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, kí hiệu bởi $\deg f(x_1, \ldots, x_n)$, là số lớn nhất trong các bậc của các từ khác không của $f(x_1, \ldots, x_n)$. Ta không định nghĩa bậc cho đa thức 0. *Đa thức hằng* là đa thức 0 hoặc đa thức bậc 0. Các đa thức bậc 1 được gọi là *đa thức tuyến tính. Đa thức thuần nhất bậc m* (hay *một dạng bậc m*) là một đa thức mà các từ khavs không của nó đều có bậc m. Đa thức thuần nhất bậc hai được gọi là *dạng toàn phương*. Với mỗi $k \in \{1, \ldots, n\}$, *bậc theo biến* x_k của một đa thức là số lớn nhất trong các số mũ của x_k xuất hiện trong các từ của đa thức đó.

Định nghĩa 1.1.3. Kí hiệu $R[x_1, \ldots, x_n]$ là tập các đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong R. Với $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$, trong đó $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ và $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$, ta định nghĩa

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = (i_1 + j_1, \ldots, i_n + j_n).$$

Khi đó $R[x_1, \ldots, x_n]$ là một vành với phép cộng và phép nhân

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} b_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} (a_{\mathbf{i}} + b_{\mathbf{i}})\mathbf{x}^{\mathbf{i}};$$
$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^{\mathbf{n}}} b_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} c_{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}},\ c_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}} a_{\mathbf{i}}b_{\mathbf{j}}.$$

với mọi đa thức $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}, \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^n} b_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}} \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Vành $R[x_1, \ldots, x_n]$ được gọi là *vành đa thức* n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong R.

Nhận xét 1.1.4. Bằng quy nạp, vành đa thức n biến $R[x_1, \ldots, x_n]$ với hệ số trong R chính là vành đa thức một biến x_n với hệ số trong vành $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử R là vành con của vành S, và $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức trong $R[x]$. Với mỗi phần tử $\alpha \in S$, ta kí hiệu $f(\alpha) = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 \in S$. Phần tử $\alpha \in S$ được gọi

là *nghiệm* của $f(x)$ nếu $f(\alpha) = 0$. Trong trường hợp này ta cũng nói α là một *nghiệm* của phương trình $f(x) = 0$ trên S. Tìm các nghiệm của $f(x)$ trên S được gọi là *giải phương trình đa thức* $f(x) = 0$ trên S.

Định lý 1.1.6 (Định lý Bézout)**.** *Cho R là một miền nguyên và đa thức $f(x) \in R[x], \alpha \in R$. Điều kiện cần và đủ để α là một nghiệm của $f(x)$ là $f(x)$ chia hết cho $(x - \alpha)$.*

Định nghĩa 1.1.7 (Nghiệm bội)**.** Cho $f(x) \in R[x], \alpha \in R, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$. Ta gọi α là *nghiệm bội k* của $f(x)$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - \alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x - \alpha)^{k+1}$ nghĩa là:

$$\begin{cases} f(x) = (x - \alpha)^k g(x), \forall x \in R, \\ g(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Nếu $k = 1$, ta gọi α là *nghiệm đơn* hay còn gọi *nghiệm*, nếu $k = 2$, ta gọi α là *nghiệm kép*.

Bổ đề 1.1.8. *Cho $f(x) \in R[x]$. Phần tử $a \in R$ là nghiệm bội k của $f(x)$ nếu và chỉ nếu $f(x) = (x - a)^k g(x)$ với $g(x) \in R[x]$ và $g(a) \neq 0$.*

Định lý 1.1.9. *Cho R là một miền nguyên. Cho $0 \neq f(x) \in R[x]$ và $a_1, a_2, \ldots, a_r \in R$ là các nghiệm phân biệt của $f(x)$. Giả sử a_i là nghiệm bội k_i của $f(x)$ với $i = 1, 2, \ldots, r$. Khi đó ta có*

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_r)^{k_r} g(x)$$

trong đó $g(x) \in R[x]$ và $g(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$.

Hệ quả 1.1.10. *Cho R là một miền nguyên và $f(x) \in R[x]$ là một đa thức khác 0. Khi đó số nghiệm của $f(x)$, mỗi nghiệm tính với số bội của nó, không vượt quá bậc của của $f(x)$.*

1.2. Chuỗi lũy thừa hình thức

Định nghĩa 1.2.1. Một *chuỗi lũy thừa hình thức* trên R là một biểu thức có dạng $a = a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, sao cho giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, b(x) =$

$\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ là hai chuỗi lũy thừa hình thức thì $a(x) = b(x)$ khi và chỉ khi $a_j = b_j$ với mọi j. Tập các chuỗi lũy thừa hình thức trên R kí hiệu là $R[[x]]$.

Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ và $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ là hai chuỗi lũy thừa hình thức bất kỳ. Ta định nghĩa phép toán cộng, phép toán nhân trong $R[[x]]$ như sau:

$$a(x) + b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j,$$

$$a(x)b(x) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}) x^j.$$

Đối với phép nhân, $R[[x]]$ có *phần tử đơn vị* là $1(x) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} 0.x^j$ mà ta sẽ đơn giản kí hiệu là 1. Ta cũng dễ kiểm tra thấy rằng $R[[x]]$ lập thành một vành giao hoán có đơn vị 1 đối với phép cộng và phép nhân trong $R[[x]]$.

Nếu với $n \in \mathbb{N}$, chuỗi lũy thừa hình thức $a(x)$ có $a_n \neq 0$ và $a_j = 0$ cho mọi $j > n$, thì $a(x)$ chính là đa thức bậc n và được đơn giản viết là $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ hay $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Hơn thế nữa, nếu $a_i = 0$ cho một i nào đó của tập $0, 1, 2, ..., n-1$, thì số hạng $a_i x^i$ cũng không cần viết; còn nếu $a_i = 1$ cho một i nào đó của tập $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, thì $a_i x^i$ được đơn giản viết là x^i. Phần tử $0(x) = \sum_{j=0}^{n} 0x^j$, mà ta đơn giản kí hiệu là 0, là *phần tử* 0 của $R[[x]]$.

Mệnh đề 1.2.2. Chuỗi $a(x) \in R[[x]]$ là khả nghịch khi và chỉ khi a_0 khả nghịch.

Chứng minh. Giả sử $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$. Khi đó $a(x)b(x) = 1$ khi và chỉ